Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Laboratoire de Modélisation en Hydraulique et Environnement

Recueil des Travaux Dirigés

MECANIQUE DES FLUIDES

Ghazi Bellakhal

2014 - 2015

SERIE 1 : Introduction au calcul tensoriel

Exercice 1

On considère un R-espace vectoriel euclidien E de dimensions n muni d'une base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,n}$

1. <u>Convention d'Einstein</u>

Ecrire chacune des expressions suivantes en utilisant la convention d'Einstein

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$\Phi = (x_1)^1 + (x_2)^2 + ... + (x_n)^n$$

On rappelle le symbole de Kronecker δ_{ij} qui est donné par la relation :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer δ_{12}, δ_{22} et δ_{ii}

2. Soient un scalaire α, un vecteur $\vec{V} = v_i \vec{e}_i$ de E et deux tenseurs du second ordre définis sur E : $A = A_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ et $B = B_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

a. Expliciter les tenseurs :

αA ; $A\vec{V}$; $AB\vec{V}$; $\alpha AAB\vec{V}$

b. Expliciter les tenseurs :

$A.\vec{V}$; $A.B$; $A:\vec{V}$; $A:B$; $A:I$ (I étant le tenseur unité)

c. Peut-on définir le tenseur $A:\vec{V}$

Exercice 2

Soit un R-espace vectoriel euclidien E de dimensions 3 muni d'une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. On définit le pseudo-tenseur d'orientation le tenseur d'ordre 3 :

$$\theta = \varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

dont les composantes ε_{ijk} sont des fonctions alternées des indices i ; j ; k tel que $\delta_{123} = 1$:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ -1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que :

   $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

   $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$

   $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$

2. Vérifier que :

   $\vec{X} \times \vec{Y} = (\varepsilon_{ijk} X_j Y_k)\,\vec{e}_i$

   Exprimer alors le produit vectoriel sous la forme d'une opération tensorielle

3. Soient trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de E. vérifier que le produit mixte $\vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B})$ s'identifie au produit contracté triple du pseudo-tenseur d'orientation par $\vec{C} \otimes \vec{B} \otimes \vec{A}$:

$$\theta \,\vdots \left[\vec{C} \otimes \vec{B} \otimes \vec{A}\right]$$

4. Soit un tenseur du second ordre antisymétrique Ω, monter qu'il existe un pseudo-vecteur $\vec{\omega}$ donné par la relation :

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{kj}$$

   tel que pour tout vecteur $\vec{X}$ de E on a :

$$\Omega \cdot \vec{X} = \vec{\omega} \times \vec{X}$$

5. montrer pour un champ vectoriel $\vec{X}$ la relation suivante :

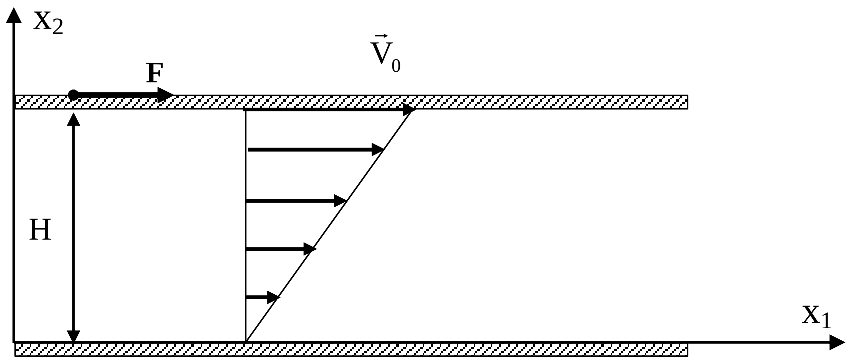
$$\vec{X} \cdot \vec{\nabla}\,\vec{X} = \vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}X^2\right] + (\vec{\nabla} \times \vec{X}) \times \vec{X}$$

Exercice 3

On considère un fluide réel maintenu entre deux plaques planes parallèles et distantes d'une épaisseur $H = 10\,\text{cm}$. On suppose que la plaque supérieure est animée d'une translation uniforme à la vitesse $V_0 = 10\,\text{ms}^{-1}$. On suppose également que suite à la condition d'adhérence du fluide aux parois, le champ de vitesse observé dans ce fluide est :

$$\mathbf{v} = \left(\frac{V_0}{H}\right) x_2\, \mathbf{e}_2$$

Comme le montre la figure suivante.



1. Calculer le vecteur vorticité de cet écoulement.
2. Calculer les éléments du tenseur de gradient de vitesse
3. En déduire les éléments des tenseurs des taux de déformation et de rotation
4. Vérifier que quelque soit le vecteur **X** de l'espace vectoriel E on a :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{X}$$

5. Calculer la vitesse de déformation dans les directions suivantes :

   a - $\mathbf{e}_1$

   b - $\mathbf{e}_2$

   c - $\mathbf{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$

   d - $\mathbf{k}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$

6. On déduit une description qualitative de la transformation d'une particule de ce fluide pendant un intervalle infinitésimal de temps.

SERIE 2 : Cinématique des Fluides

Exercice 1

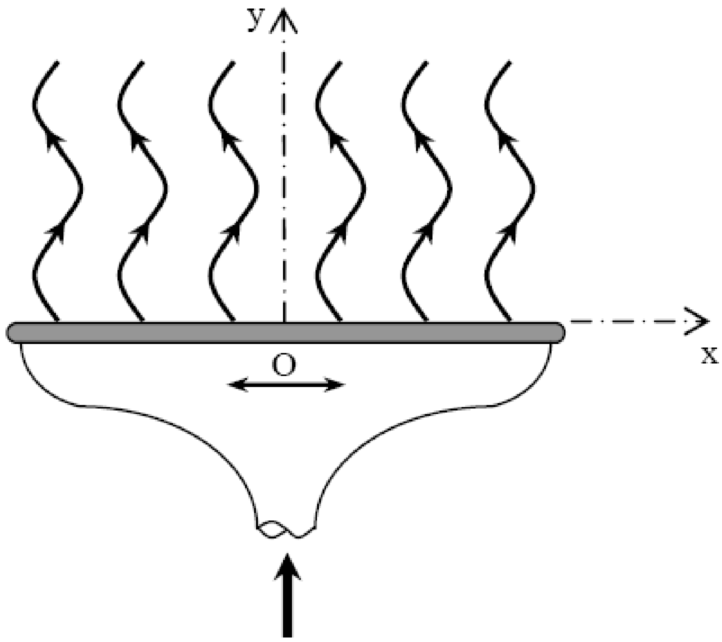
On considère un écoulement décrit par le champ de vitesse suivant

$$v_1 = K x_1 \quad ; \quad v_2 = -K x_2 \quad ; \quad v_3 = 0$$

1. Déterminer les lignes de courant de cet écoulement et tracer leur allure
2. En déduire une interprétation simple de la structure d'un tel écoulement

Exercice 2

L'écoulement d'eau à travers les orifices de la rampe d'arrosage représentée dans la figure suivante



génère un champ de vecteurs vitesse exprimé en fonction des variables d'Euler comme suit :

$$\vec{V} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u = u_0 \sin[\omega(t - \dfrac{y}{v_0})] \\ v = v_0 \\ \text{où } u_0 \text{ , } v_0 \text{ et } \omega \text{ sont des constantes} \end{cases}$$

La composante selon y reste constante tandis que la composante selon x coïncide en y = 0 avec la vitesse de déplacement de la rampe d'arrosage :

$$u(x, y = 0, t) = u_0 \sin(\omega t)$$

1. Déterminer les lignes de courant de cet écoulement
2. Préciser la ligne de courant passant par l'origine à t = 0 s, puis à $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$
3. Déterminer les trajectoires des particules.
4. Préciser la trajectoire de la particule émise à l'origine à t = 0 s, puis à $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$
5. Déterminer l'allure de la ligne d'émission relative à l'origine à un instant t donné

Exercice 3

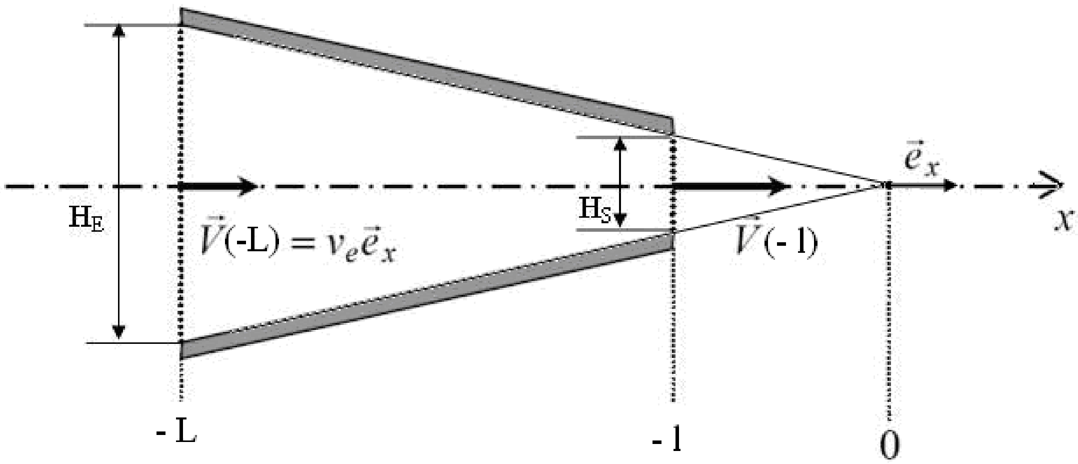
On considère un fluide parfait qui s'écoule à l'intérieur d'un tuyau d'axe vertical et de section non uniforme. Cet écoulement est permanent décrit de manière eulérienne par le champ de vitesse suivant exprimé en coordonnées cylindriques dans la base $(\mathbf{u}_r\ ; \mathbf{u}_\theta\ ; \mathbf{u}_z)$:

$$v = 2K\,r\,\mathbf{u}_r + K'z\,\mathbf{u}_z$$

1. Exprimer la constante K' en fonction de la constante positive K
2. Montrer que l'écoulement considéré est irrotationnel
3. Déterminer le champ d'accélération de cet écoulement
4. Déterminer les lignes de courant et tracer leur allure

Exercice 4

On considère l'écoulement stationnaire bidimensionnel plan d'un fluide parfait incompressible à l'intérieur d'une buse (voir figure). La vitesse à l'entrée de la buse est supposée uniforme sur la section, ayant la valeur $\mathbf{v}_e = v_e\mathbf{e}_x$.



1 - Montrer que la vitesse du fluide le long de l'axe est donnée par :

$$\mathbf{v} = v_e \left(\frac{-L}{x}\right) \mathbf{e}_x$$

2 - Déterminer l'accélération de l'écoulement le long de l'axe

3 - Déterminer en fonction du temps la position d'une particule initialement située à l'entrée de la buse. En déduire son accélération.

4 - Comparer les deux accélérations, conclure

On donne :

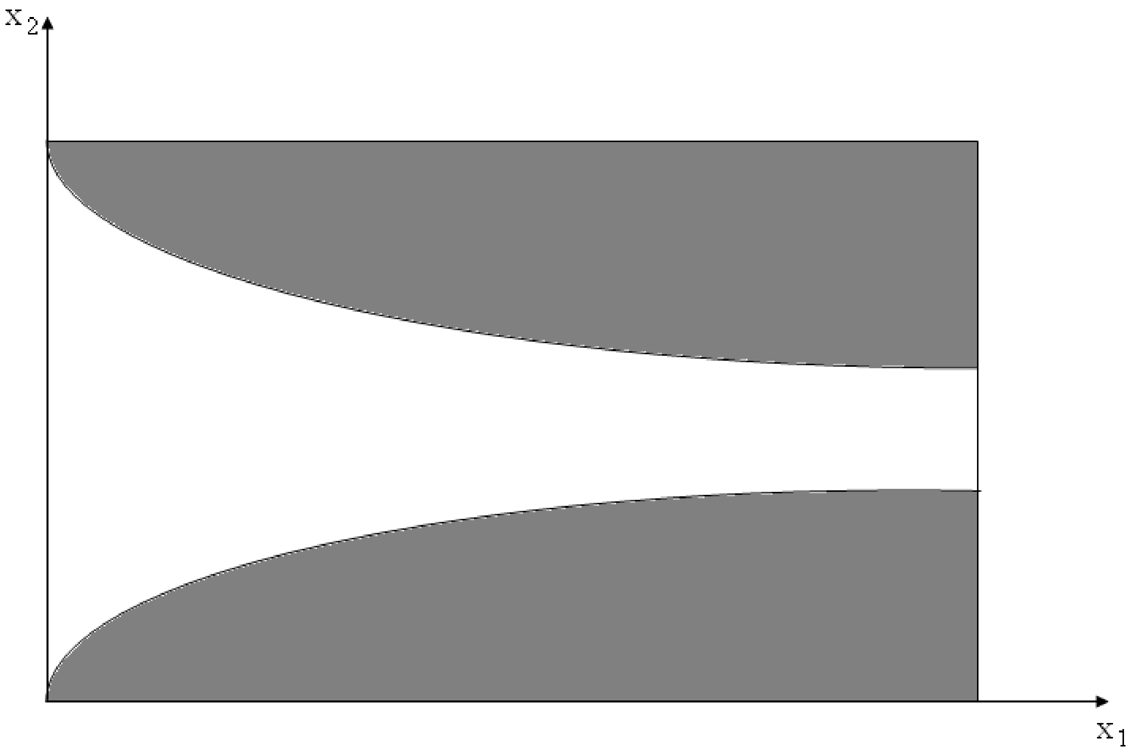
$L = 5m$; $l = 2m$; $v_e = 10\,ms^{-1}$; $\rho = 1000\,kgm^{-3}$

L'angle d'ouverture de la buse $\alpha = 30°$

Exercice 5

On se propose de construire une soufflerie où on pourra étudier sur un modèle réduit le comportement dynamique d'un avion en phase d'accélération. Ceci sera possible si on place le modèle réduit immobile dans une région où on réalise un écoulement dans lequel on maintient une accélération spatiale longitudinale. Une telle soufflerie peut être conçue selon le schéma présenté ci-dessous. On suppose que l'écoulement est celui d'un fluide parfait incompressible, quasi-parallèle et garde une vitesse uniforme à toute section transversale de la soufflerie.

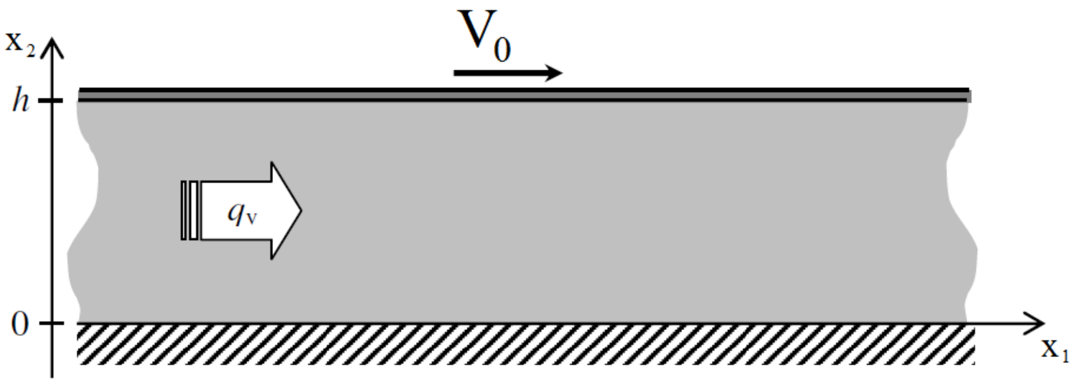
Déterminer l'équation cartésienne des deux parois profilées (supérieure et inférieure) de la soufflerie qui permettent de réaliser un tel écoulement.


x_2
x_1

SERIE 3 : Dynamique des Fluides Réels

Exercice 1 : Ecoulement d'un fluide visqueux entre deux plans parallèles

On considère l'écoulement d'un fluide réel incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν, entre deux plaques planes parallèles et distantes d'une épaisseur h (voir figure). La plaque supérieure est susceptible d'être animée d'une vitesse de translation V_0 par rapport à la plaque inférieure.



L'écoulement est supposé permanent, bidimensionnel dans le plan (x_1 x_2) et parallèle. On considère également que le fluide est non pesant.

1. Ecrire le système d'équations de Navier-Stockes décrivant cet écoulement.
2. Montrer que l'écoulement est établi (invariant par translation) dans la direction x_1.
3. Déterminer le champ de vitesse dans le milieu fluide et représenter schématiquement dans les deux cas suivants :

   a) $\dfrac{dp}{dx_1} = 0$ et $V_0 \neq 0$

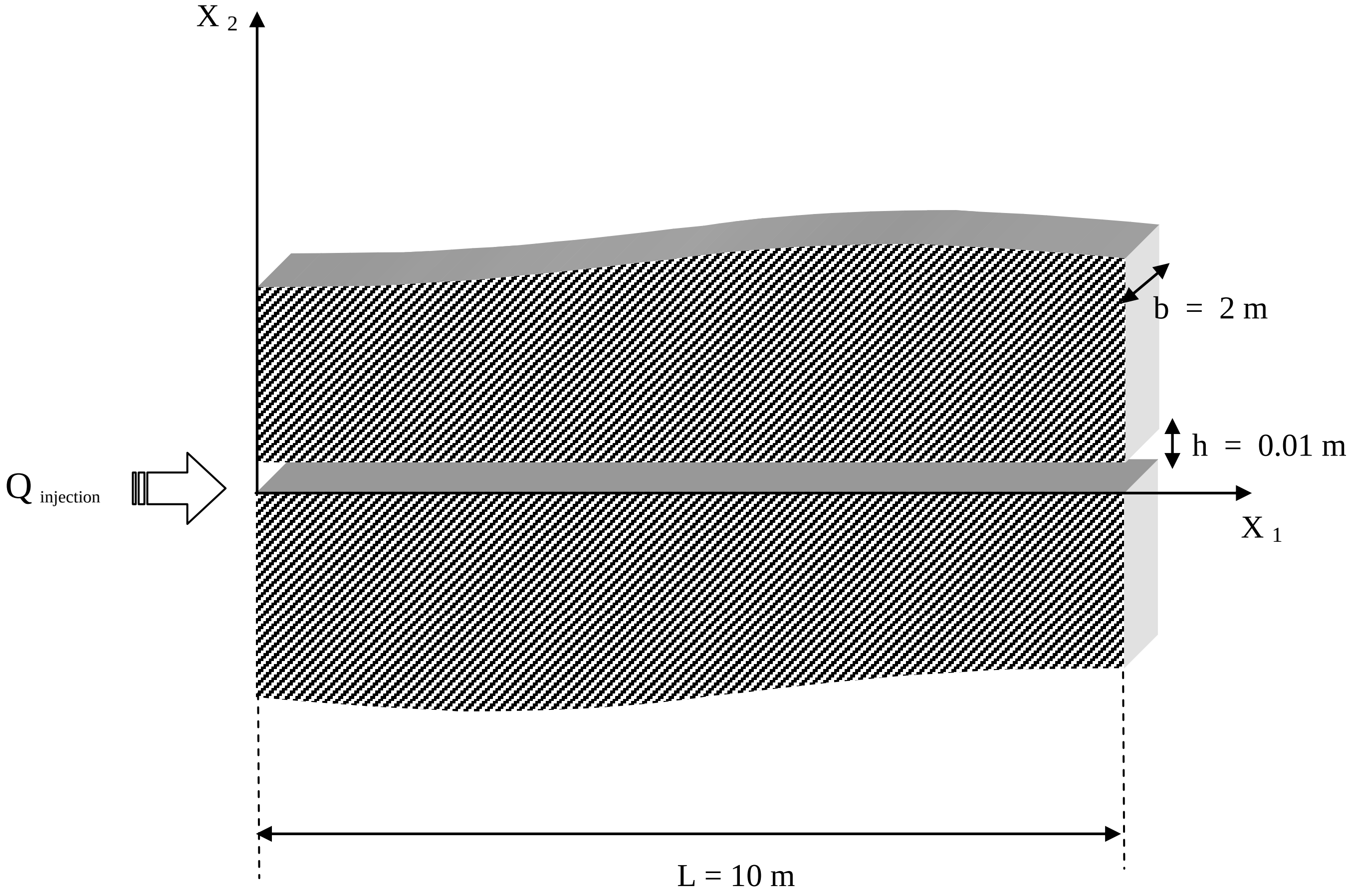
   b) $\dfrac{dp}{dx_1} = -\Gamma < 0$ et $V_0 = 0$

4. Déterminer également le champ de vitesse dans le milieu fluide et représenter schématiquement dans les deux cas suivants

   a) $\dfrac{dp}{dx_1} = -\Gamma < 0$ et $V_0 > 0$

b) $\dfrac{dp}{dx_1} = -\Gamma < 0$ et $V_0 < 0$

5. Calculer le débit du fluide par unité de largeur et la vitesse moyenne de l'écoulement dans chaque cas
6. On désire remplir une fissure géologique à l'aide d'un coulis de béton injecté sous pression. La fissure est assimilée à un jeu (entre deux surfaces planes définies par deux massifs rocheux) d'épaisseur $h = 1\,\text{cm}$ comme le montre la figure suivante.

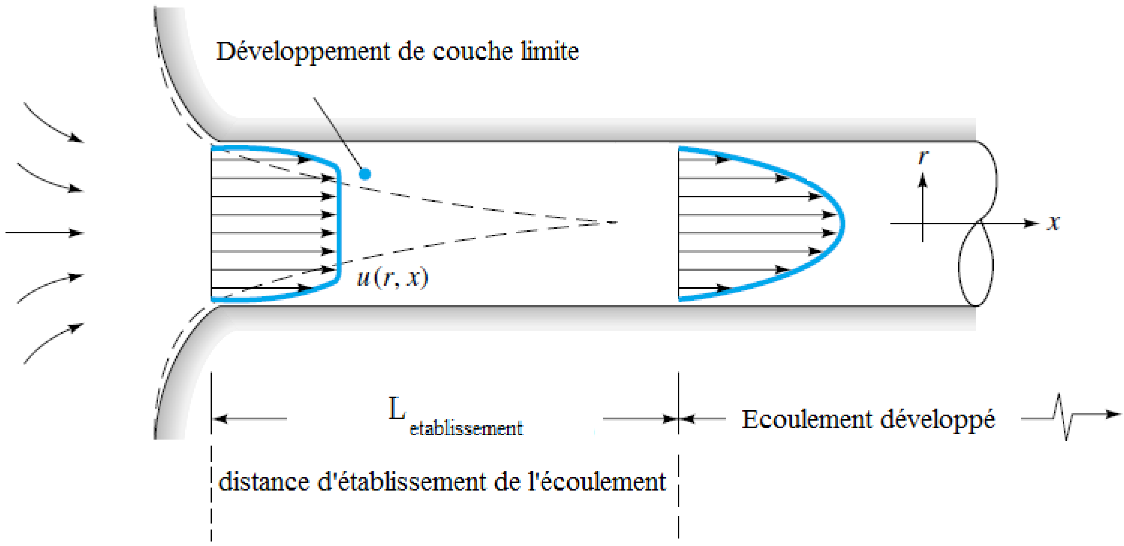


La fissure est considérée horizontale, de longueur L = 10 m et de largeur b = 2 m. Elle débouche sur l'air atmosphérique. Le coulis de béton est supposé un fluide newtonien de masse volumique $\rho_{beton} = 2400 \ \text{kg/m}^3$ et de viscosité dynamique $\mu = 0.1$ Poiseuil. L'écoulement est supposé à la même structure que celui établi entre deux plaques planes et étudié dans 3. a.

Calculer la pression d'injection nécessaire pour assurer un débit de remplissage $Q_{injection} = 0.1 \ \text{m}^3\text{s}^{-1}$.

Exercice 2 : Ecoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique

On considère l'écoulement d'un fluide réel incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν, dans une conduite cylindrique de rayon R. l'écoulement de ce fluide est supposé permanent, axisymétrique (indépendant de θ) et laminaire qui s'établit à partir d'une certaine distance $L_{établissement}$. Le profil transversal de la vitesse du fluide devient dans la zone avale d'établissement invariant par déplacement longitudinal.



A – <u>Conduite horizontale :</u>

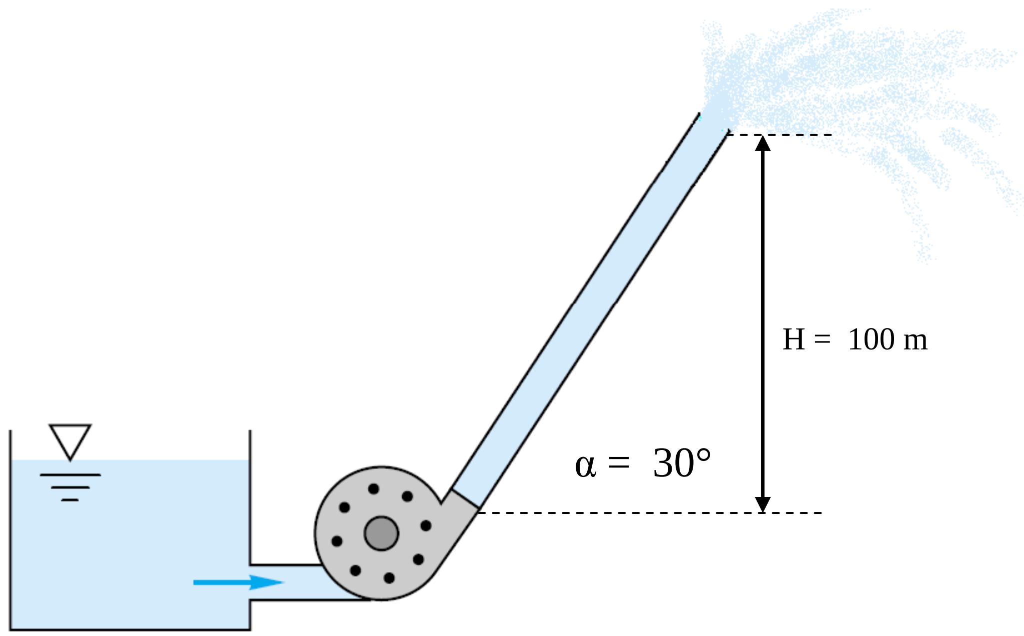
1. Montrer que l'écoulement établi est parallèle
2. Ecrire le système de Navier-Stockes décrivant cet écoulement dans la zone d'établissement.
3. Sachant que le gradient longitudinal de la pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ reste constant dans cette zone, déterminer le champ de la vitesse. Préciser où est située la vitesse maximale, en déduire une description schématique du mouvement des particules fluides dans cet écoulement dans une conduite cylindrique en régime laminaire.
4. Calculer le débit de l'écoulement ainsi que la vitesse moyenne.
5. Calculer le tenseur des taux de cisaillement à la paroi

B – <u>Conduite inclinée ascendante :</u>

La conduite cylindrique est supposée maintenant inclinée d'un angle α, ascendante et déversant en réalisant un jet dans l'air atmosphérique.

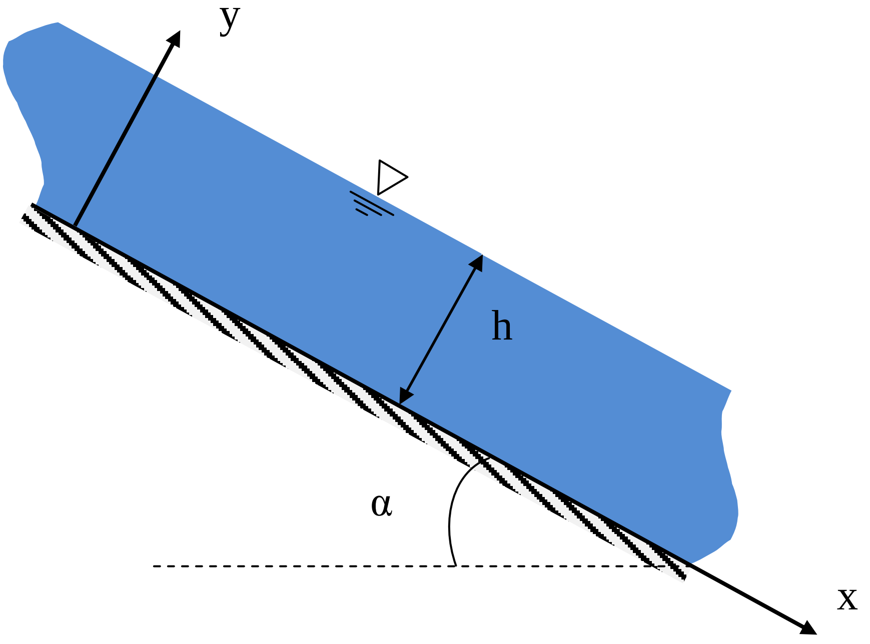
1. Ecrie les équations de Navier-Stockes dans ce cas.
2. Déterminer le gradient longitudinal minimal de la pression qui permet de maintenir un écoulement ascendant.
3. On suppose que la conduite est inclinée d'un angle $\alpha = 30°$. Elle transfert un fluide visqueux en écoulement en régime supposée laminaire à une hauteur. Pour se faire elle est montée à son entrée à une pompe comme le montre la figure suivante. Le fluide sera par la suite déversé à l'air atmosphérique.

   En adoptant l'approximation que le profil de vitesse de l'écoulement déterminé en zone d'établissement reste valable dans toute la conduite, déterminer la pression nécessaire que doit développer la pompe à l'entrée de la conduite pour pomper un débit $Q = 0.2 \; m^3 s^{-1}$ d'un coulis de béton supposé un fluide newtonien de masse volumique $\rho_{beton} = 2400 \quad kg/m^3$ et de viscosité dynamique $\mu = 0.1$ Poiseuil.



Exercice 3 : Ecoulement laminaire à surface libre d'un fluide visqueux sur un plan incliné

On considère l'écoulement à surface libre sur un plan incliné d'un fluide réel incompressible de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν. Cet écoulement est supposé laminaire, permanent, bidimensionnel dans le plan (x y) comme le montre la figure suivante et établi. Il garde profondeur constante h.



1. Ecrire le système de Navier-Stockes décrivant cet écoulement avec les conditions aux limites qui lui sont imposées
2. En déduire le champ de vitesse de cet écoulement.
3. Calculer à une profondeur h la vitesse à la surface libre ainsi que le débit par unité de largeur
4. Calculer la densité surfacique du frottement exercé par le radier sur cet écoulement

SERIE 4 : Théorèmes Généraux de la Mécanique des Fluides

Exercice 1 : Ecoulement dans un coude

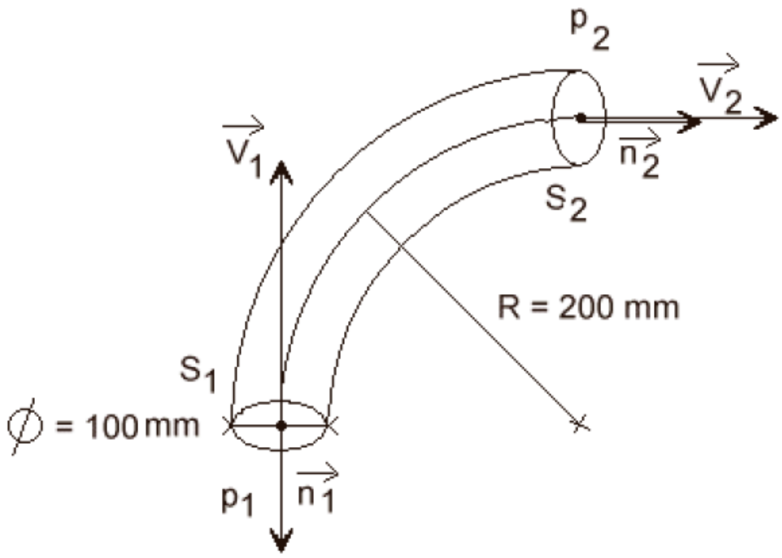


Figure 1 : coude de conduite

On considère l'écoulement d'eau dans un coude à $90°$ sous un débit $Q = 25\ l/s$. Le diamètre de la conduite $\Phi = 100\,mm$. Le rayon moyen du coude $R = 200\,mm$. Sachant que $P_1 - P_a = 8.10^5\ Pa$ (8 bar), Calculer l'action du fluide sur le coude entre les sections 1 et 2.

Exercice 2 : Réaction d'une lance d'incendie

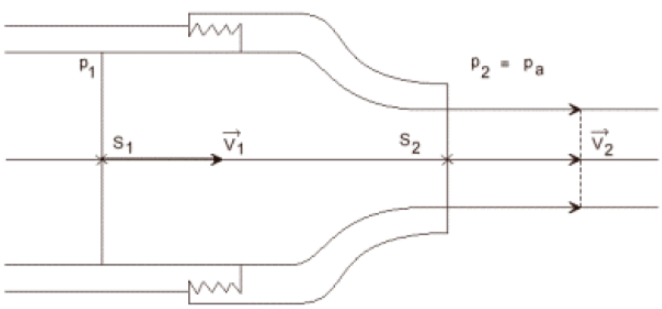


Figure 2 : Embout d'une lance d'incendie

L’embout d’une lance d’incendie a 3 cm de diamètre intérieur. Quand l’embout est ouvert la lance débite 40 l/s. Calculer :

1. La pression à l’entrée de l’embout.
2. La résultante des forces s’exerçant sur le pas de vis maintenant l’embout.

Exercice 3 : Vidange d’un réservoir

On considère un réservoir comportant une ouverture de diamètre d. On veut comparer le débit de vidange de ce réservoir, d'une part avec la seule ouverture, et d'autre part en prolongeant l'ouverture par un tube vertical de longueur L (voir figure). Le liquide sera par ailleurs considéré parfait.

1. Déterminer, dans les deux cas, la vitesse du liquide à la distance verticale L en dessous de l'ouverture, ceci lorsque le réservoir est rempli d'une hauteur h.
2. Quelle est la vitesse du liquide au niveau de l'ouverture dans les deux cas ?
3. En déduire le débit de vidange dans l'un et l'autre cas. Quel est le dispositif le plus efficace?
4. Quelle est la longueur maximale de tube que l'on peut utiliser sans qu'il y ait cavitation ?

Que vaut le débit pour cette longueur ?

A.N. : h = 5 m ; d = 20 cm ; pression de vapeur du liquide à 20°C = 2,34 kPa.

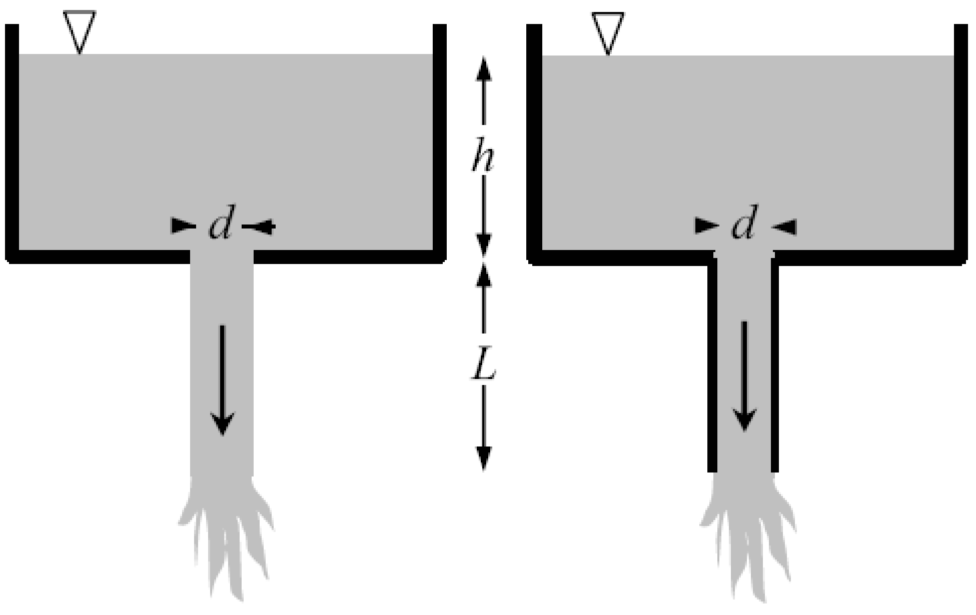


Figure 3 : Vidange du réservoir

Exercice 4 : Aérodynamique d'un avion

On considère un avion de chasse à réacteur. Il développe une force de poussée grâce à un moteur à propulsion de diamètre 69.3 cm qui réalise à l'arrière de l'avion un jet d'air de vitesse $\vec{V}_{jet}$.

1. On délimite un volume de contrôle attaché à l'avion défini par le box représenté sur la figure suivante et la surface de l'avion. Etablir, à partir d'un bilan global de quantité de mouvement sur ce domaine la résultante de la force exercée sur cet avion.
2. Si l'avion vole à une vitesse de croisière constante $\vec{V} = 0.5\,c$ ($c = 360$ m/s). Déterminer la vitesse du jet nécessaire pour développer une force de poussée égale à 50 kN.

Figure 4 : Volume de contrôle attaché à l'avion

SERIE 5 : Potentiel complexe - Etude de l'écoulement autour d'un cercle (série PC4 du cours MF 101, TA1)

Exercice 1

1. Déterminer le potentiel complexe de l'écoulement induit par une source placée en $x = a$ de débit D et un puits placé en $x = -a$ de débit - D.
2. On fait simultanément tendre a vers zéro et D vers l'infini de telle sorte que $a D = k$ où k est une constante donnée. Quel est l'écoulement limite obtenu?

Exercice 2 : Ecoulement autour d'un cercle

On considère le potentiel complexe suivant :

$$f_1(z) = V_\infty \left(z + \frac{a}{z} \right) \qquad (1)$$

obtenu par la superposition d'un écoulement uniforme à l'infini et d'un doublet à l'origine.

1. Montrer que le cercle $\rho = a$ est une ligne de courant particulière ainsi que l'axe Ox. Tracer l'allure des lignes de courant.
2. On superpose à l'écoulement précédent (1) un tourbillon à l'origine :

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{avec} \quad f_2(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \mathrm{Log}(z) \qquad (2)$$

   Montrer que le cercle $\rho = a$ reste ligne de courant. La vitesse à l'infini est elle modifiée? Conclusion ?
3. Montrer que si Γ ne dépasse pas une valeur limite que l'on déterminera, il existe deux points d'arrêts sur le cercle, symétriques par rapport à Oy. Tracer l'allure du champ.